Défis Première Spé maths : sens de variation   Thiaude P.

Défi SECDEG 01 Le potager rectangulaire

L'unité de distance est le mètre.
On doit délimiter un potager rectangulaire $ABCD$ et le clôturer sur ses quatre côtés : on dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 mètres de clôture : $AB + BC + CD + DA = 20$. On pose : $AB = x$.

1. Exprimer l'aire $f(x)$ du potager uniquement en fonction de x.
2. Pourquoi doit-on étudier f sur l'intervalle $[0;10]$ uniquement ?
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;10]$, en déduire la distance AB pour laquelle l'aire du potager est maximale.

Corrigé

1. Posons $y = AD$.
On dispose de 20 m de clôture et elle sera entièrement utilisée donc :
$2x + 2y = 20$, autrement dit : $x + y = 10$, ou encore : $y = 10 - x$.
L'aire $f(x)$ du rectangle $ABCD$ est :
$$f(x) = AB \times AD = x \times (10 - x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$$

2. On a d'une part $AB \geqslant 0$, autrement dit $x \geqslant 0$.
D'autre part $AD \geqslant 0$, qui s'écrit $y \geqslant 0$, autrement dit : $10 - x \geqslant 0$, qui s'écrit aussi : $x \leqslant 10$.
Résumons : $0 \leqslant x$ et $x \leqslant 10$, autrement dit $x \in [0;10]$.

3. Pour tout $x \in [0\,;10]$, $f(x) = -x^2 + 10x$.
$-x^2 + 10x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = 0$.
On a :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = +\frac{10}{2} = 5$$
$a = -1$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0\,;\alpha]$ c'est-à-dire $[0;5]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha\,;10]$ c'est-à-dire $[5\,;10]$.

On a :
$$f(0) = -(0)^2 + 10(0) = 0$$
$$f(5) = -(5)^2 + 10(5) = -25 + 50 = 25$$
$$f(10) = -(10)^2 + 10(10) = -100 + 100 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 5$	10
sens de variation de f	0 $\nearrow$	$\beta = 25$	$\searrow$ 0

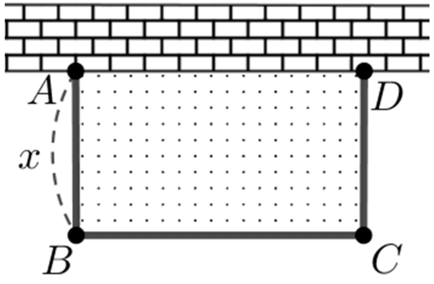
L'aire maximale est 25 m^2, atteinte pour $AB = 5\ m$.

On alors $y = 10 - 5 = 5$, le potager d'aire maximale est un carré de côté 5 m.

Défi SECDEG 02 Le potager rectangulaire adossé à un mur

L'unité de distance est le mètre.
On doit délimiter un potager rectangulaire $ABCD$ et le clôturer sur trois de ses quatre côtés, on dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 m de clôture : $AB + BC + CD = 20$.

On pose : $AB = x$ et on note $f(x)$ l'aire du potager, $0 \leqslant x \leqslant 10$.



1. Montrer que pour tout $x \in [0;10]$, $f(x) = -2x^2 + 20x$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
Quelle est l'aire maximale du potager ?
Préciser alors les longueurs AB et BC.

Corrigé

1. $ABCD$ est un rectangle donc $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times BC$.
or, d'une part : $AB = x$ et d'autre part : $AB + BC + CD = 20$ qui donne $x + BC + x = 20$ autrement dit $BC = 20 - 2x$, donc :
$$\mathcal{A}_{ABCD} = x \times (20 - 2x) = 20x - 2x^2 = -2x^2 + 20x$$
Comme $f(x) = \mathcal{A}_{ABCD}$ on obtient : $f(x) = -2x^2 + 20x$.
Pour tout $x \in [0;10]$, $f(x) = -2x^2 + 20x$.

2. $-2x^2 + 20x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 20$ et $c = 0$.
On a :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-2)} = \frac{-20}{-4} = +5$$

$$\beta = f(\alpha) = f(5) = -2(5)^2 + 20(5) = -2 \times 25 + 100 = 50$$

$a = -2$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;5]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha;10]$ i.e. sur $[5;10]$

$$f(0) = -2(0)^2 + 20(0) = 0$$
$$f(10) = -2(10)^2 + 20(10) = -2 \times 100 + 200 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 5$	10
Sens de variation de f	0 $\nearrow$	$\beta = 50$	$\searrow$ 0

Le tableau de variation montre que le maximum de f sur $[0;10]$ est 50, atteint pour $x = 5$.
Lorsque $AB = 5$, on a : $BC = 20 - 2(5) = 20 - 10 = 10$.

L' **aire maximale du potager est $50\ m^2$**, atteinte lorsque $\boldsymbol{AB = 5\ m}$ et $\boldsymbol{BC = 10\ m}$.

Défi SECDEG 03 Le ballon de foot

L'unité de distance est le mètre, on admet que la trajectoire d'un ballon de foot dans un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est au niveau du sol, l'axe des ordonnées est vertical, l'origine du repère est la position du ballon lors de l'impact avec le pied, admet pour équation $y = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.

1. Déterminer le maximum de f puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer la solution strictement positive de l'équation $f(x) = 0$ puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$
$-0{,}05x^2 + 2{,}4x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$avec $a = -0{,}05$, $b = 2{,}4$ et $c = 0$. On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2{,}4}{2 \times (-0{,}05)} = \frac{-2{,}4}{-0{,}1} = 24$$

$a = -0{,}05$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $]-\infty;\alpha]$ i.e. sur $]-\infty;24]$, $f \searrow$ sur $[\alpha;+\infty[$ i.e. sur $[\alpha;+\infty[$
$\beta = f(\alpha) = f(24) = 28{,}8$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\alpha = 24$	$+\infty$
Sens de variation de f	$\nearrow$	$\beta = 28{,}8$	$\searrow$

Le maximum de f est 28,8 et il est atteint en $x = 24$.
L'altitude maximale du ballon est 28,8 m.

2. Avec les notation de l'exercice, on a les équivalences :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 2{,}4x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}05x + 2{,}4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0\ ou - 0{,}05x + 2{,}4 = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ 0{,}05x = 2{,}4$$
$$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = \frac{2{,}4}{0{,}05} \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 48$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive : 48.
La ballon retombe sur le sol à 48 m de son point de départ.

Défi SECDEG 04 Optimiser la recette d'un théâtre

Un directeur de théâtre dispose d'une salle dans laquelle toutes les places sont proposées au même prix, et il constate que :

- lorsque le prix de la place est fixé à 20€ alors il peut espérer 130 spectateurs
- toute augmentation de 1€ du prix de la place fait baisser de 10 le nombre de spectateurs, et réciproquement que toute baisse de 1€ du prix de la place amène 10 spectateurs supplémentaires : le nombre de spectateurs est donc une fonction affine du prix de la place.

Le prix de la place peut ne pas être un nombre entier d'euros.
Quel doit être le prix de la place pour que la recette soit maximale et que vaut cette recette maximale ?

Corrigé
Pour un prix de la place de x euros, notons $N(x)$ le nombre de spectateurs et $R(x)$ la recette en €.
$N(x)$ est une fonction affine de x par conséquent il existe deux constantes a et b telles que $N(x) = ax + b$.

Or :
• pour $x = 20$ il y a 130 spectateurs, donc $N(20) = 130$ ce qui donne $20a + b = 130$.
• pour $x = 21$ on aura 10 spectateurs de moins soit 120 spectateurs, donc $N(21) = 120$, autrement dit : $21a + b = 120$.
On a les équivalences :

$$\begin{cases} 20a + b = 130 \\ 21a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ 21a + 130 - 20a = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ a = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 + 200 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 330 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 330 \end{cases}$$

On a donc : $N(x) = -10x + 330$.
Le nombre de spectateur est nécessairement positif ou nul donc :

$$-10x + 330 \geqslant 0 \Leftrightarrow -10x \geqslant -330$$

En divisant par -10 qui est strictement négatif, on obtient :

$$\frac{-10x}{-10} \leqslant \frac{-330}{-10} \Leftrightarrow x \leqslant 33$$

Il faut donc que $0 \leqslant x \leqslant 33$.

On a : recette = prix de la place × nombre de spectateurs, donc pour tout $x \in [0;33]$, on a : $R(x) = x \times (-10x + 330) = -10x^2 + 330\,x$.
$-10x^2 + 330\,x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -10$, $b = 330$ et $c = 0$,

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-330}{2(-10)} = \frac{33 \times 10}{2 \times 10} = \frac{33}{2} = 16{,}5$$

$a = -10$, $a < 0$ donc :
$R \nearrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;16{,}5]$ et $R \searrow$ sur $[\alpha;33]$ i.e. sur $[16{,}5\,;33]$.

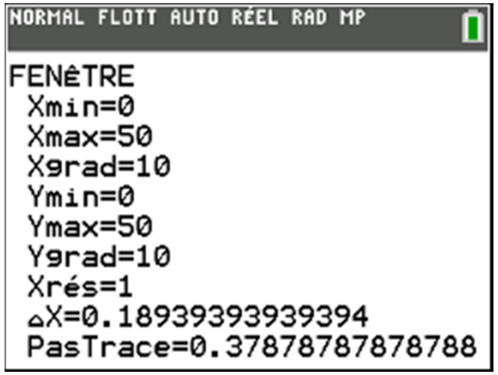
On a :

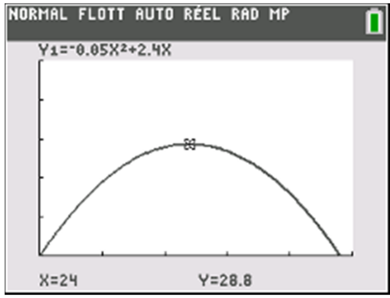
$$R(0) = -10(0)^2 + 330(0) = 0$$
$$R(16{,}5) = -10(16{,}5)^2 + 330(16{,}5) = 2\,722{,}5$$
$$R(33) = 0$$

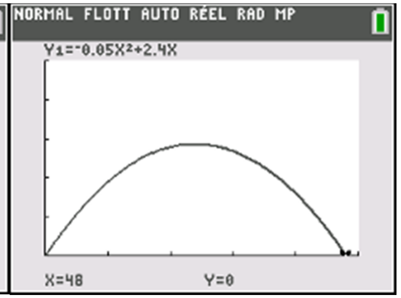
On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 16{,}5$	33
sens de variation de R	0 $\nearrow$	$\beta = 2\,722{,}5$	$\searrow$ 0

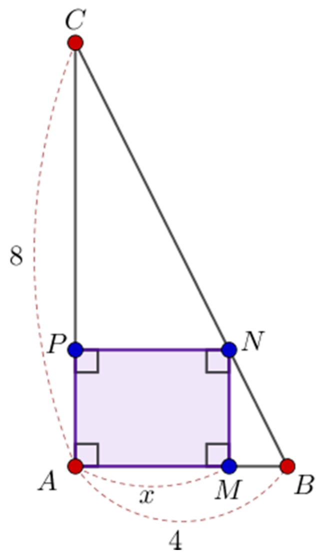
La recette maximale est $2\,722{,}5$ €, elle sera atteinte pour un prix de la place fixé à $16{,}5$€.







Défi SECDEG 05 Rectangle dans un triangle rectangle (grand classique)
ABC est un triangle rectangle en A tel que :
$AB = 4$, $AC = 8$.
Pour tout $x \in [0;4]$, on note : M le point de $[AB]$, tel que $AM = x$, N et P les points de $[BC]$ et $[AC]$ respectivement tels que $AMNP$ est un rectangle,
$f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.



1. Justifier que $(MN) \mathbin{/\!/} (AC)$, en déduire que :

$$MN = 8 - 2x.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$:

$$f(x) = -2x^2 + 8x$$

3. Étudier le sens de variation de f sur $[0;4]$, en déduire quelle est l'aire maximale de $AMNP$ ainsi que la valeur de x permettant de l'atteindre. Que peut-on alors dire de M ?

4. Pour quelles valeurs de x l'aire de $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Corrigé

1. Justifier que $(MN) \mathbin{/\!/} (AC)$, en déduire que : $MN = 8 - 2x$.

On sait que $(MN) \perp (AB)$ et $(AC) \perp (AC)$.
On utilise : « si deux droites sont perpendiculaire à une même troisième, alors elles sont parallèles ».
On en déduit que $(MN) \mathbin{/\!/} (AC)$.

On sait que B, M, A sont alignés, B, N, C sont alignés, $(MN) \mathbin{/\!/} (AC)$.
On utilise le théorème de Thalès.
On en déduit que :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$

d'où :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$$
$$\frac{4-x}{4} = \frac{MN}{8}$$
$$\frac{4-x}{4} \times 8 = MN$$
$$MN = 8 \times \frac{4-x}{4}$$
$$MN = 2(4-x)$$
$$MN = 8 - 2x$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$: $f(x) = -2x^2 + 8x$.

$AMNP$ est un rectangle donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = AM \times AP$.
Or, $AM = x$ et $AP = AC - AP = AC - MN = 8 - x$.
Donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = x \times (8 - 2x) = 8x - 2x^2 = -2x^2 + 8x$.
Comme $f(x) = \mathcal{A}_{AMNP}$ on a bien : $\forall x \in [0;4], f(x) = -2x^2 + 8x$.

3. • sens de variation de f sur $[0;4]$

$-2x^2 + 8x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2, b = 8$ et $c = 0$.
On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$
$$\beta = f(\alpha) = -2(2)^2 + 8(2) = -2 \times 4 + 16 = -8 + 16 = 8$$

$a = -2, a < 0$ donc :

$f \nearrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;2]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha;4]$ i.e. sur $[2;4]$.
On a :

$$f(0) - 2(0)^2 + 8(0) = 0$$
$$f(4) = -2(4)^2 + 8(4) = -2 \times 16 + 32 = -32 + 32 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 2$	4
Sens de variation de f	0 $\nearrow$	$\beta = 8$	$\searrow$ 0

• maximum de f sur $[0;4]$

Le tableau de variation montre que le maximum de f sur $[0; 4]$ est 8, atteint pour $x = 2$.

• aire maximale de $AMNP$

Comme $f(x)$ est l'aire du rectangle $AMNP$, on en déduit que l'aire maximale de ce rectangle est 8, atteinte pour $x = 2$.
Pour cette valeur de x, on a :

$$AM = 2 = \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} \times AB$$

et comme $M \in [AB]$, on en déduit que M est le milieu de $[AB]$.
Autrement dit l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque M est le milieu de $[AB]$.

4. Pour quelles valeurs de x l'aire de $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Il s'agit de résoudre dans $[0; 4]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 6$:

$$-2x^2 + 8x \geqslant 6 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 \geqslant 0$$

$-2x^2 + 8x - 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 8$ et $c = -6$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-2)(-6) = 64 - 48 = 16$.
$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{-8-4}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2(-2)} = \frac{-8+4}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	0		1		3		4
Signe de $-2x^2+8x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On souhaite que : $-2x^2+8x-6 \geqslant 0$, le tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions : $[1;3]$.

L'aire de $AMNP$ est supérieure ou égale à 6 pour $x \in [1;3]$.

Défi SECDEG 06 Distance minimale

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2;3)$, $B(8;0)$ et C(4;4),
M est un point variable de (AB).

1. Justifier que : $y_M = -\dfrac{1}{2}x_M + 4$.
2. En déduire que : $CM^2 = \dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}f$, on pose : $f(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.
   Dresser le tableau de variation de f.
4. On admet que : « pour tout M de la droite (AB) : CM est minimal lorsque CM^2 est minimal ». Pour quel point M de la droite (AB) la distance CM est-elle minimale et que vaut cette dernière ?
   On donnera la distance minimale et les coordonnées de M sous forme de fraction irréductible.

Corrigé

1. $A(2;3)$, $B(8;0)$
   La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :
   $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{8-2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$
   On obtient :
   $$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$
   Or $M \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient cette équation, autrement dit :
   $$\boldsymbol{y_M = -\frac{1}{2}x_M + 4}$$

2. **En déduire que : $CM^2 = \dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.**
   On est dans un repère orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance : $CM = \sqrt{(y_M - y_C)^2 + (x_M - x_C)^2}$
   donc : $CM^2 = (y_M - y_C)^2 + (x_M - x_C)^2$.
   En utilisant les coordonnées de C et de M, on obtient :
   $$CM^2 = \left(-\frac{1}{2}x_M + 4 - 4\right)^2 + (x_M - 4)^2 = \left(-\frac{1}{2}x_M\right)^2 + (x_M - 4)^2$$
   $$= \frac{1}{4}x_M^2 + x_M^2 - 8x_M + 16 = \left(\frac{1}{4} + 1\right)x_M^2 - 8x_M + 16 = \frac{5}{4}x^{M^2} - 8x_M + 16$$
   On a donc bien : $CM^2 = \dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.

3. **$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$, dresser le tableau de variation de f.**
   $\dfrac{5}{4}x^2 - 8x + 16$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{5}{4}$, $b = -8$, $c = 16$.
   On a :
   $$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{8}{\frac{5}{2}} = 8 \times \frac{2}{5} = \frac{8 \times 2}{5} = \frac{16}{5}$$
   $$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 8\left(\frac{16}{5}\right) + 16 = \frac{16}{5}$$
   $a = \dfrac{5}{4}$, $a > 0$ donc :
   $f \searrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $\left]-\infty; \frac{16}{5}\right]$ et $f \nearrow$ sur $\left[\frac{16}{5}; +\infty\right[$.
   On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\alpha = \dfrac{16}{5}$		$+\infty$
Sens de variation de f		$\searrow$	$\beta = \dfrac{16}{5}$	$\nearrow$	

4. On admet que : « pour tout M de la droite (AB) : CM est minimal lorsque CM^2 est minimal ». Pour quel point M de la droite (AB) la distance CM est-elle minimale et que vaut cette dernière ? *On donnera la distance minimale et les coordonnées de M sous forme de fraction irréductible.*

Lorsque $x_M = \alpha = \frac{16}{5}$, alors

$$y_M = -\frac{1}{2} \times \frac{16}{5} + 4 = -\frac{8}{5} + \frac{20}{5} = \frac{-8}{5} + \frac{20}{5} = \frac{-8+20}{5} = \frac{12}{5}$$

Le tableau de variation de f montre que CM^2 a pour minimum $\frac{16}{5}$, donc la distance minimale est $CM = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$

atteinte pour $x_M = \frac{16}{5}$, c'est-ç-dire pour $\boldsymbol{M\left(\frac{16}{5} ; \frac{12}{5}\right)}$.

<u>Vérification</u>

Cette distance minimale s'appelle « la distance entre (AB) et C », elle est égale à CH où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

1	A:=(2,3) → $A := (2, 3)$
2	B:=(8,0) → $B := (8, 0)$
3	C:=(4,4) → $C := (4, 4)$
4	d:=Droite(A, B) → $d :\ y = \frac{-1}{2}\ x + 4$

5	d':=Perpendiculaire(C, d) → $d' :\ y = 2\ x - 4$
6	H:=Intersection(d, d') → $H := \left\{\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)\right\}$
7	Distance(C, d) → $4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$